Master 2 *Mathématiques Fondamentales*

(english version below)

Le responsable du Master 2 *Mathématiques Fondamentales* est

Friedrich Wagemann Friedrich.Wagemann@univ-nantes.fr

Chaque étudiant doit valider les trois cours communs, plus deux cours spécialisés chaque semestre. Les cours spécialisés sont à choisir parmi les dix cours proposés en M2 MF à l'Université de Nantes. Dans un soucis de visibilité, ces dix cours sont répartis en deux parcours : Algèbre et Géométrie, et Analyse et Probabilités. Cette division est purement indicative, les étudiantes sont libres de choisir les cours spécialisés parmis les dix proposés. Il est également possible de choisir jusqu'à deux cours du Master 2 partenaire de l'Université de Rennes (avec des frais de transport éventuellement pris en charge par le département de Mathématique) et, sous réserve de validation préalable du responsable pédagogique, dans d'autres masters nantais. Il est possible qu'un cours ne soit finalement pas donné due à un nombre trop faible d'étudiants inscrits.

Il est possible de suivre plus de cours que nécessaires : dans ce cas, les meilleures notes seront retenues.

La partie pratique consiste en un stage de 3 mois (à peu près du 1er avril au 30 juin) dans un laboratoire de recherche sous la direction d'un enseignant-chercheur. Le stage peut se dérouler dans un autre laboratoire que le Laboratoire de Mathématiques Jean Leray de Nantes. La recherche du stage commence généralement début janvier et est orientée par le responsable du M2. Ce stage se termine par la remise d'un rapport (écrit en Anglais) et une soutenance d'une demi-heure.

Une réunion de rentrée aura lieu à l'Université de Rennes le jeudi 3 septembre 2026. Elle sera l'occasion de présenter tous les cours du premier semestre et de choisir les cours suivis. Un départ de Nantes sera organisé vers 8h(?).

Master 2 de Mathématiques **Année 2026-2027**
Université de Nantes

Master 2 *Fundamental Mathematics*

The 2nd year of our Master in Fundamental Mathematics is chaired by

Friedrich Wagemann Friedrich.Wagemann@univ-nantes.fr

This M2 is organised along two thematics :
- Algebra and Geometry
- Analysis and Probability

Each student must complete the three classes which are in common, plus two specialized classes each semester. The specialized lectures are chosen from the ten lectures offered in M2 MF at Nantes Université. For the sake of visibility, these ten classes are divided into two tracks : Algebra and Geometry, and Analysis and Probability. This division is purely academic ; students are free to choose specialized lectures among the ten lectures proposed. It is also possible to choose up to two lectures from the partner Master 2 program at Rennes University (with transport costs possibly covered by the Mathematics Department) and, subject to prior approval by the course director, from other Master programs in Nantes. It is possible that some lectures are not given because of an insufficient number of students attending it.

It is possible to attend more courses than necessary : in this case, the highest notes will be kept and the lowest dropped.

A large part of the second semester is devoted to a 3-month research internship (approximately from April 1st to June 30th) leading to the writing of a Master thesis (written in English). This internship may take place in another department than the Laboratoire de Mathématiques Jean Leray in Nantes.

An opening meeting will take place at Rennes University on September 3rd 2024, during which lectures from the first semester will be presented. Students will then choose which courses they will take. A departure from Nantes will be organized at 8 a.m. (?).

Cours communs (premier semestre)

Introduction to differentiable manifolds (Baptiste Chantraine)

Résumé : Le but de ce cours est d'introduire, et d'illustrer par de nombreux exemples, les variétés différentielles et les objets associés : champs de vecteurs, formes différentielles, cohomologie de de Rahm.

Abstract : The purpose of this course is to introduce, through many examples, differentiable manifolds and differentiable objects that lives on these : vector fields, differential forms, de Rahm Cohomology.

Applications of Fourier Analysis to PDE (François Nicoleau)

Résumé : Le cours présente les outils fondamentaux de l'analyse de Fourier pour l'étude des équations aux dérivées partielles linéaires (Laplace, Poisson, chaleur, ondes, Schrödinger). Il introduit les distributions, la transformée de Fourier et les espaces de Sobolev, en mettant l'accent sur les questions d'existence et d'unicité. Une introduction à la théorie de Sturm–Liouville, en lien avec la séparation des variables et les problèmes spectraux, complète cette approche. L'accent est mis sur les exemples explicites et les calculs concrets.

Abstract. The course presents the fundamental tools of Fourier analysis for the study of linear partial differential equations (Laplace, Poisson, heat, wave, and Schrödinger equations). It introduces distributions, the Fourier transform, and Sobolev spaces, with an emphasis on existence and uniqueness results. An introduction to Sturm–Liouville theory, in connection with separation of variables and spectral problems, complements this approach. The focus is on explicit examples and concrete computations.
Contenu du cours.

(1) **Séries de Fourier et premiers exemples.** Séries de Fourier sur le cercle, orthogonalité, convergence, premières applications aux problèmes aux limites, introduction aux espaces de Sobolev.

(2) **Distributions.** Fonctions test, distributions, dérivation au sens des distributions, convolution, régularisation.

(3) **Transformée de Fourier.** Transformée de Fourier sur l'espace de Schwartz, distributions tempérées, formules d'inversion et de Plancherel, règles de calcul.

(4) **Espaces de Sobolev.** Définition via la transformée de Fourier, propriétés de base et exemples.

(5) **Applications aux EDP.** Équations de Laplace et de Poisson, équation de la chaleur, équation des ondes, équation de Schrödinger ; représentations explicites des solutions, existence et unicité.

(6) **Introduction à la théorie de Sturm–Liouville.** Opérateurs auto-adjoints du second ordre, conditions aux limites, orthogonalité des fonctions propres, exemples explicites, lien avec la séparation des variables.

(7) **Point de vue spectral.** Les séries de Fourier comme cas particulier de décomposition spectrale : fonctions propres du Laplacien et diagonalisation. Lien avec la méthode de séparation des variables et application aux équations d'évolution.

Séminaire des étudiantes – Student seminar(Vincent Colin et/and Joseph Viola)

Chaque étudiant choisira deux sujets dans les listes proposées par les responsables : un sujet sujet en algèbre–géométrie et un sujet en analyse–probabilité. L'étudiante présentera ces sujets au reste du groupe dans deux exposés durant le semestre, en anglais.

Each student will choose two topics from the lists proposed by the group leaders : one topic in algebra–geometry and one topic in analysis–probability. The student will present these topics to the rest of the group in two presentations during the semester, in English.

Parcours Algèbre et Géométrie

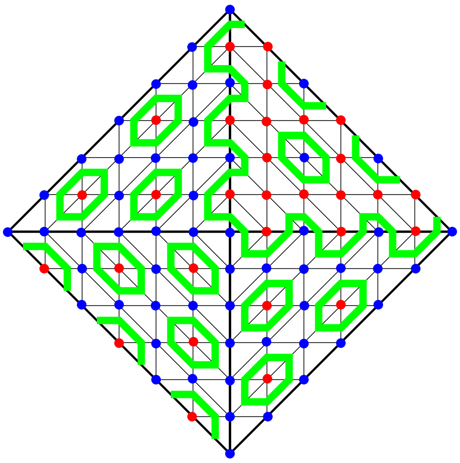
Premier semestre

Topologie algébrique – Algebraic topology (Rémi Leclercq)

Résumé : Le but du cours est d'introduire des invariants d'espaces topologiques permettant, entre autre, de les distinguer. Nous commencerons par étudier les complexes de chaînes pour introduire le complexe des chaînes singulières d'un espace. Nous utiliserons les propriétés de suites exactes et d'excision pour calculer l'homologie de quelques exemples. Nous calculerons l'homologie des complexes cellulaires à l'aide de l'homologie cellulaire. Dans la seconde partie du cours nous parlerons de cohomologie et de dualité de Poincaré, de changement de coefficient et du théorème des coefficient universel.

Abstract : The goal of the class is to introduce some invariants of topological spaces allowing to distinguish them. We will start by studying chain complex and introduce the singular chain complex of a topological space. We will use exact sequences and excision to comute the homology of some example. We will compute the homology of CW complexes using cellular homology. In the second part of the class we will talk about cohomology and Poicaré duality and change of coefficient and prove the universal coefficient theorem.

Géométrie algébrique réelle – Real Algebraic Geometry (Erwan Brugallé)



Résumé : Le sujet principal de ce cours est l'étude des solutions *réelles* d'équations polynomiales à coefficients *réels*. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux équations à une ou deux variables. Nous aborderons en particulier les problèmes suivants :

- Comment compter le nombre de racines réelles d'un polynôme réelles ? (règle de Descartes, théorème de Sturm)
- Que dire de la topologie – la forme – d'une courbe algébrique réelle dans le plan, ie des solutions dans $\mathbb{R}^2$ d'uné équation polynomiale réelle $P(x, y) = 0$? (un théorème de Harnack stipule que le nombre de composantes connexes est toujours majoré par $\frac{d(d-1)}{2} + 1$, où d est le degré de P)

Ce cours sera l'occasion d'introduire les techniques et objets élémentaires de géométrie algébrique. En particulier, nous travaillerons dans les espaces projectifs plutôt que les espaces affines. Si le temps le permet, nous aborderons le cas des surfaces dans l'espace. Et nous expliquerons bien sûr la signification du dessin ci-dessus.

Abstract : The main topic of this course is the study of *real* solutions to polynomial equations with *real* coefficients. We will fo cus particularly on equations with one or two variables. We will address the following problems in particular :

— How can we count the number of real roots of a real polynomial ? (Descartes' rule of signs, Sturm's theorem)

— What can we say about the topology – the shape – of a real algebraic curve in the plane, i.e., the solutions in $\mathbb{R}^2$ of a real polynomial equation $P(x, y) = 0$? (A theorem by Harnack states that the number of connected components is always bounded by $\frac{d(d-1)}{2} + 1$, where d is the degree of P)

This course will also introduce elementary techniques and objects from algebraic geometry. In particular, we will work in projective spaces rather th an affine spaces. If time permits, we will explore the case of surfaces in space. And of course, we will explain the meaning of the drawing above.

Deuxième semestre

Introduction à la géométrie symplectique dérivée – Introduction to derived symplectic geometry (Tristan Bozec)

Résumé : L'objectif de ce cours est de fournir les outils algébriques nécessaires à la mise en place de la géométrie symplectique dérivée (ou décalée). L'idée principale est d'utiliser des données homotopiques pour traiter les espaces singuliers qui apparaissent naturellement en physique (par exemple en mécanique classique ou en théories des champs). Les objets géométriques permettant des recollements appropriés à identification près sont les champs que nous ne traiterons pas de manière exhaustive. Ce cours s'appuiera sur de nombreux exemples classiques issus de la géométrie Hamiltonienne, ce qui donnera l'opportunité de parler par exemple de groupoïdes de Lie dans des situations ad hoc.

Nous commencerons par définir les structures symplectiques et lagrangiennes décalées linéaires, illustrées par le complexe de de Rham (dualité de Poincaré, théorème de Stokes), la théorie (différentielle) de Lie ou les actions hamiltoniennes. Nous verrons ensuite des notions de géométrie dérivée à proprement parler, en s'appuyant notamment sur l'exemple crucial du lieu critique. Enfin nous évoquerons le cas des 1-champs symplectiques décalés, avec cette fois l'exemple de BG central en théorie de Chern–Simons.

pré-requis souhaités : géométrie différentielle, topologie algébrique, géométrie algébrique, théorie de Lie, algèbre homologique cours parallèle suggéré : homotopie simpliciale

Abstract : The aim of this course is to provide the algebraic tools required for the development of derived (or shifted) symplectic geometry. The main idea is to use homotopical data to deal with the singular spaces that arise naturally in physics (for example, in classical mechanics or field theory). The geometric objects that allow gluings up to specific identification are stacks, that we will not cover in detail. This course will draw on numerous classic examples from Hamiltonian geometry, which will provide an opportunity to discuss Lie groupoids in specific contexts.

We will begin by defining linear shifted symplectic and lagrangian structures, illustrated by the de Rham complex (including Poincaré duality, Stokes' theorem), Lie (differential) theory, and Hamiltonian actions. We will then tackle concepts of actual derived algebraic geometry, focusing on the crucial example of the critical locus. Finally, we will discuss the case of shifted symplectic 1-stacks, using the central example of BG in Chern–Simons theory.

Recommended prerequisites : differential geometry, algebraic topology, algebraic geometry, Lie theory, homological algebra Suggested parallel course : simplicial homotopy

Un aperçu de l'homotopie simpliciale – A glimpse of simplicial homotopy (Hossein Abbaspour)

Résumé : On commence par introduire la catégorie simpliciale $\triangle$, et puis on définit un objet simplicial comme un foncteur contravariant de $\triangle$ vers une catégorie donnée (ensembles, groupes, anneaux, etc.). Cette définition abstraite permet d'encoder des structures de manière combinatoire, via des "faces" et des "dégénérescences".

On présentera ensuite des exemples et résultas fondamentaux : ensembles simpliciaux, groupes simpliciaux, et complexes de chaînes associés, et le théorème de Dold-Kan. On montre comment associer à un objet simplicial une réalisation géométrique, faisant le lien entre la combinatoire et la topologique.

Une partie importante du cours sera consacrée aux techniques d'homotopie : Fibration de Kan, groupes d'homotopie, équivalences faibles, fibrations et cofibrations dans les catégories de modèles. On y voit comment les objets simpliciaux servent de modèles discrets pour les espaces topologiques.

Le cours peut aborder les résolutions simpliciales, et leurs applications en cohomologie (par exemple en cohomologie des groupes ou en théorie des faisceaux) et, selon l'orientation, on peut aussi introduire les ∞-catégories via les ensembles simpliciaux (quasi-catégories).

Abstract :

We begin by introducing the simplicial category $\triangle$, and then define a simplicial object as a contravariant functor from $\triangle$ to a given category (sets, groups, rings, etc.). This abstract definition makes it possible to encode structures combinatorially, through "face" and "degeneracy" maps.

We then present fundamental examples and results : simplicial sets, simplicial groups, the associated chain complexes, as well as the Dold–Kan theorem. We show how to associate a geometric realization to a simplicial object, thereby establishing a link between combinatorics and topology.

An important part of the course is devoted to homotopy-theoretic techniques : Kan fibrations, homotopy groups, weak equivalences, as well as fibrations and cofibrations in model categories. In this context, one sees how simplicial objects serve as discrete models for topological spaces.

The course may also cover simplicial resolutions and their applications in cohomology (for example, in group cohomology or sheaf theory). Depending on the orientation, it may also introduce ∞-categories via simplicial sets (quasi-categories).

Une introduction à la théorie ergodique – Introduction to ergodic theory. (Élise Goujard)

Résumé : Un système dynamique est une fonction définie sur un ensemble, dont on cherche à comprendre le comportement des orbites en temps long, ou plus généralement un flot dont on cherche à comprendre les trajectoires en temps long. En théorie ergodique on s'intéresse plus particulièrement à la dynamique des transformations mesurables préservant une mesure de probabilité sur un espace mesuré. Par exemple si on considère un billard dans lequel on lance une bille sans frottement, on peut se demander si elle revient à son point de départ en temps suffisamment long, si elle visite toutes les régions de la table de billard, etc.

Dans ce cours nous présenterons un panorama des propriétés, méthodes et outils de base de théorie ergodique (récurrence, ergodicité, mélange, méthodes spectrales, entropie, etc) en mettant l'accent sur des exemples géométriques. On s'intéressera en particulier à la dynamique des flots géodésique et horocyclique sur les surfaces hyperboliques après avoir discuté de leur géométrie. Selon le temps on étudiera également la dynamique du flot linéaire sur les surfaces de translation en lien avec les billards polygonaux et les échanges d'intervalles.

Abstract : A dynamical system is a map acting on a set, and the aim of the theory is to understand the long time behavior of the orbits. More generally one considers flows and one tries to understand the long time behavior of the trajectories. Ergodic theory studies the dynamics of measure preserving actions of measurable maps on a measure space. For instance, consider the system formed by a billiard ball moving with no friction on a billiard table. Does it come back to its initial point eventually ? Does it visit all regions of the table ?

In this course we present a panorama of the basic properties, methods and tools from ergodic theory (recurrence, ergodicity, mixing, spectral methods, entropy, etc) with a special emphasis on geometrical examples. One goal of the course if to study the dynamics of the geodesic and horocycle flow on hyperbolic surfaces ; we will first discuss their construction and geometric properties. Depending on time we will also study some dynamical properties of the linear flow on translation surfaces in relation to polygonal billiards and interval exchange transformations.

Parcours Analyse et Probabilités

Premier semestre

Introduction aux EDPs Hamiltonniennes – Introduction to Hamiltonian PDEs (Joackim Bernier)

Résumé : Nous étudierons des EDPs dispersives non linéaires posées sur des domaines bornés et possédant une structure hamiltonienne (équations de Klein–Gordon, de Schrödinger, etc.). Ce sont essentiellement des systèmes conservatifs non linéaires décrivant la propagation d'ondes dans des domaines confinés. Après avoir établi leur théorie de Cauchy dans un cadre simple, nous nous concentrerons principalement sur la dynamique de leurs petites solutions. Nous verrons en particulier en quoi la question de leur stabilité est liée à l'existence de phénomènes de résonances. Pour y parvenir, nous établirons un théorème de forme normale de Birkhoff adapté a ux EDPs.

Abstract : We will study nonlinear dispersive PDEs posed on bounded domains and equipped with a Hamiltonian structure (Klein–Gordon and Schrödinger equations, among others). These are essentially conservative, nonlinear systems describing wave propagation in confined domains. After establishing their Cauchy theory in a simple framework, we will focus primarily on the dynamics of their small solutions. We will examine in particular how the question of their stability is linked to the existence of resonance phenomena. To achieve this, we will establish a Birkhoff normal form theorem adapted to PDEs.

Processus stochastiques et équations différentielles stochastiques – Stochastic processes and stochastic differential equations (Paul-Éric Chaudru de Raynal, Nicolas Pétrélis)

Résumé : Le programme du cours qui s'articule en 8 leçons, est, approximativement, le suivant :

(1) processus stochastique, en particulier gaussiens
(2) mouvement brownien : construction, propriétés
(3) martingales en temps continu
(4) intégrale stochastique
(5) formule d'Itô et applications
(6) équations différentielles stochastique

Abstract : The program of this series of 8 lectures is subdivided as follows :

(1) stochastic processes, in particulier gaussian
(2) brownian mouvement : construction, properties
(3) continuous time martingales
(4) stochastic integrals
(5) Itô's formula and applications
(6) stochastic differential equations

Deuxième semestre

Analyse et géométrie des modèles de la mécanique quantique – Analysis and geometry of quantum mechanical models (Joseph Viola)

Résumé : On va étudier des modèles de base de la mécanique quantique et l'analyse mathématique issue de cet étude : déplacements temps-fréquences et le groupe de Heisenberg, évolution de Schrödinger de l'oscillateur harmonique, décomposition en paquets d'ondes, théorie spectrale, etc. Avec ces outils, on va aussi étudier des aspects d'opérateurs non-autoadjoints. Comme références, on va utiliser entre autres Combescure-Robert, "Coherent States and Mathematical Physics" et Folland, "Harmonic Analysis in Phase Space".

Abstract : We will study the basic models of quantum mechanics and the analysis coming from this study : time-frequency relation and the Heiseinberg group, Schrödinger evolution of the harmonic oscillator, decomposition into wave packets, spectral theory, etc. With these tools, we will also study aspects of non selfadjoint operators. As a reference, we will use within others the books Combescure-Robert, "Coherent States and Mathematical Physics" and Folland, "Harmonic Analysis in Phase Space".

Processus de Lévy et applications – Levy processes and applications (Loïc Chaumont)

Résumé : Les processus de Lévy sont les équivalents en temps continu des marches aléatoires. Leur représentants les plus connus sont le processus de Poisson et le mouvement brownien. Les applications des processus de Lévy sont très variées, allant de la construction de certaines familles d'arbres aléatoires en probabilités fondamentales aux applications des mathématiques en théorie du risque. Après avoir étudié les propriétés élémentaires de ces processus nous aborderons deux applications importantes : la représentation des processus markoviens auto-similaires et la caractérisation des processus de branchement.

Abstract : Levy processes are the continuous time equivalent of random walks. Their representatives which are the most well-known are the Poisson process and the Browian mouvement. The applications of Levy processes are most varied, ranging from the construction of certain families of random trees in fundamental probability theory to mathematical applications in risk theory. After studying the elementary properties of these processes, we will focus on two important applications : the representation of self-similar markovian processes and the characterization of branching processes.

Champs aléatoires et ensembles de niveaux – Random fields and level sets (Guillaume Poly)

Résumé : Le cours débutera par une introduction générale aux champs aléatoires et tout particulièrement les champs Gaussiens avec un accent mis sur l'étude de la régularité de leurs trajectoires et une présentation des inégalités fonctionnelles classiques. Puis, ce cours développera les outils (i.e. formules de Kac Rice) permettant d'étudier les ensembles de niveaux de ces champs et leurs propriétés asymptotiques dans différents contextes (processus Gaussiens stationnaires, polynômes aléatoires de Kac, polynômes trigonométriques aléatoires, harmoniques sphériques aléatoires etc...) Si le temps le permet, on pourra s'intéresser au caractère universel de ces propriétés asymptotiques à savoir étudier comment le choix de l'aléa sous-jacent au modèle influe sur le comportement limite des ensembles de niveaux mais aussi présenter quelques applications concrètes en physique mathématiques ou bien en statistiques.

Abstract : The course will begin with a general introduction to random fields, and in particular Gaussian fields, with a focus on the study of the regularity of their trajectories and a presentation of classical functional inequalities. The course will then develop the tools (i.e. Kac Rice formulas) for studying the level sets of these fields and their asymptotic properties in different contexts (stationary Gaussian processes, random Kac polynomials, random trigonometric polynomials, random spherical harmonics, etc.). Time permitting, the universal character of these asymptotic properties will be explored, i.e. how the choice of the underlying randomness influences the limit behavior of level sets, as well as concrete applications in mathematical physics and statistics.