
Master 2 *Mathématiques Fondamentales*

(english version below)

Le responsable du Master 2 *Mathématiques Fondamentales* est

Friedrich Wagemann

Friedrich.Wagemann@univ-nantes.fr

Chaque étudiant doit valider les trois cours communs, plus deux cours spécialisés chaque semestre. Les cours spécialisés sont à choisir parmi les onze cours proposés en M2 MF à l'Université de Nantes. Dans un souci de visibilité, ces onze cours sont répartis en deux parcours : Algèbre et Géométrie, et Analyse et Probabilités (dont un cours en commun avec le M2 MACS de Nantes Université). Cette division est purement indicative, les étudiantes sont libres de choisir les cours spécialisés parmi les onze proposés. Il est également possible de choisir jusqu'à deux cours du Master 2 partenaire de l'Université de Rennes (avec des frais de transport éventuels pris en charge par le Centre Henri Lebesgue ou du département de Mathématique) et, sous réserve de validation préalable du responsable pédagogique, dans d'autres masters nantais.

Il est possible de suivre plus de cours que nécessaires : dans ce cas, les meilleures notes seront retenues.

La partie pratique consiste en un stage de 3 mois (à peu près du 1er avril au 30 juin) dans un laboratoire de recherche sous la direction d'un enseignant-chercheur. Le stage peut se dérouler dans un autre laboratoire que le Laboratoire de Mathématiques Jean Leray de Nantes. La recherche du stage commence généralement début janvier et est orientée par le responsable du M2. Ce stage se termine par la remise d'un rapport et une soutenance d'une demi-heure.

Une réunion de rentrée aura lieu à l'Université de Rennes le 3 septembre 2024. Elle sera l'occasion de présenter tous les cours du premier semestre et de choisir les cours suivis. Un départ de Nantes sera organisé vers 9h30.

Master 2 *Fundamental Mathematics*

The 2nd year of our Master in Fundamental Mathematics is chaired by

Friedrich Wagemann

Friedrich.Wagemann@univ-nantes.fr

This M2 is organised along two thematics :

- Algebra and Geometry
- Analysis and Probability

Each student must complete three common courses, plus two specialized courses each semester. The specialized courses are chosen from the eleven courses offered in M2 MF at Nantes Université. For the sake of visibility, these ten courses are divided into two tracks : Algebra and Geometry, and Analysis and Probability (including one joint course with M2 MACS from Nantes Université). This division is purely indicative ; students are free to choose specialized courses from among the eleven proposed. It is also possible to choose up to two courses from the partner Master 2 program at Rennes University (with transport costs covered by the Centre Henri Lebesgue or the Mathematics Department) and, subject to prior approval by the course director, from other Master programs in Nantes.

It is possible to attend more courses than necessary : in this case, the highest notes will be kept and the lowest dropped.

A large part of the second semester is devoted to a 3-month research internship (approximately from April 1st to June 30th) leading to the writing of a Master thesis. This internship may take place in another department than the Laboratoire de Mathématiques Jean Leray in Nantes.

An opening meeting will take place at Rennes University on September 3rd 2024, during which lectures from the first semester will be presented. Students will then choose which courses they will take. A departure from Nantes will be organized at 9h30.

Cours communs (premier semestre)

Introduction to differentiable manifolds (Hossein Abbaspour)

Résumé : Le but de ce cours est d'introduire, et d'illustrer par de nombreux exemples, les variétés différentielles et les objets associés : champs de vecteurs, formes différentielles, cohomologie de de Rahm.

Abstract : The purpose of this course is to introduce, through many examples, differentiable manifolds and differentiable objects that lives on these : vector fields, differential forms, de Rahm Cohomology.

Applications of Fourier Analysis to PDE (Gabriel Rivière)

Résumé : Plusieurs équations aux dérivées partielles classiques (equations de Laplace et Poisson, equation de la chaleur, equation des ondes, equation Schrodinger) seront étudiées en utilisant les outils fournis par l'analyse de Fourier. Une grande partie du cours sera consacrée à l'étude des espaces des distributions (ou des fonctions généralisées), aux opérations sur ces espaces, et aux espaces des Sobolev. Puis, on s'intéressera à l'existence et l'unicité des solutions pour les equations mentionnées ci-dessus.

Abstract : Several classical partial differential equations (Laplace, Poisson, heat, wave and Schrodinger equations) will be studied from the perspective of Fourier analysis. For this, we will need to introduce the formalism of spaces of distributions (or generalized functions), the associated operations and transformations (among which, the Fourier transform), and Sobolev spaces. With this set of tools, we can address questions regarding the existence and the uniqueness of solutions for the equations mentioned above.

Séminaire des étudiantes – Student seminar (Vincent Colin et Joe Viola)

Chaque étudiant choisira deux sujets dans les listes proposées par les responsables : un sujet en algèbre–géométrie et un sujet en analyse–probabilité. L'étudiante présentera ces sujets au reste du groupe dans deux exposés durant le semestre, en anglais.

Each student will choose two topics from the lists proposed by the group leaders : one topic in algebra–geometry and one topic in analysis–probability. The student will present these topics to the rest of the group in two presentations during the semester, in English.

Parcours Algèbre et Géométrie

Premier semestre

Topologie algébrique – Algebraic topology (Rémi Leclercq)

Résumé : Le but du cours est d'introduire des invariants d'espaces topologiques permettant, entre autre, de les distinguer. Nous commencerons par étudier les complexes de chaînes pour introduire le complexe des chaînes singulières d'un espace. Nous utiliserons les propriétés de suites exactes et d'excision pour calculer l'homologie de quelques exemples. Nous calculerons l'homologie des complexes cellulaires à l'aide de l'homologie cellulaire. Dans la seconde partie du cours nous parlerons de cohomologie et de dualité de Poincaré, de changement de coefficient et du théorème des coefficient universel.

Abstract : The goal of the class is to introduce some invariants of topological spaces allowing to distinguish them. We will start by studying chain complex and introduce the singular chain complex of a topological space. We will use exact sequences and excision to compute the homology of some example. We will compute the homology of CW complexes using cellular homology. In the second part of the class we will talk about cohomology and Poicaré duality and change of coefficient and prove the universal coefficient theorem.

Géométrie algébrique – Algebraic Geometry (Christoph Sorger)

Résumé : Ce cours d'introduction à la géométrie algébrique débutera par une présentation des variétés algébriques, affines et projectives, en adoptant une approche de calcul explicite via les bases de Gröbner, et en introduisant des systèmes de calcul formels tels que Oscar. Nous explorerons ensuite les propriétés locales, les diviseurs, les intersections, puis introduirons la notion de schéma, avant de nous intéresser plus spécifiquement à la théorie géométrique des invariants de Mumford et de ses applications.

Abstract : This introductory course in algebraic geometry will begin with a presentation of algebraic varieties, both affine and projective, using an explicit computational approach via Gröbner bases, and by introducing computer algebra systems such as Oscar. We will then explore local properties, divisors, intersections, and introduce the notion of schemes, before turning more specifically to Mumford's geometric invariant theory and its applications.

Deuxième semestre

Une introduction à la topologie symplectique – An introduction to symplectic topology (Fabio Gironella)

Résumé : La géométrie symplectique est une branche des géométrie et topologie différentielles qui étudie les variétés munie d'une structure symplectique, c'est-à-dire d'une forme différentielle fermée et non-dégénérée. Ce domaine voit son origine dans le formalisme Hamiltonien pour la mécanique classique, et a connu une explosion en intérêt au cours des dernières décennies, principalement pour le fait qu'il est caractérisé par une interaction très subtile entre les phénomènes géométriques, également appelés "rigides", et les phénomènes topologiques, qu'on appelle aussi "flexibles". Les techniques topologiques sont particulièrement efficaces pour sonder cette interaction, ce qui conduit

parfois à qualifier le domaine comme "topologie symplectique", selon le type de techniques utilisées.

Le but du cours est de donner une introduction au domaine en adoptant exactement une perspective topologique. Nous commencerons par des définitions de base, des exemples et des constructions, et nous continuerons en décrivant l'un des principaux outils utilisés pour détecter la rigidité, à savoir les courbes pseudo-holomorphes à la Gromov. On donnera aussi une introduction très rapide aux structures de contact, et on décrira comme application principale des techniques pseudo-holomorphes un théorème de Eliashberg-Floer-McDuff de classification à difféomorphisme près des remplissages symplectiques exacts des sphères de contact standard.

Abstract : Symplectic geometry is a branch of differential geometry and topology studying manifolds equipped with a symplectic structure, i.e. a closed and non-degenerate differential 2-form. It originated from the Hamiltonian formalism describing classical mechanics and it has seen an explosion in interest in the past few decades, mainly due to the very non-trivial interaction between "geometric" phenomena, also called rigid, and topological ones, also called "flexible". Topological techniques are especially very effective to probe this interaction, which leads to sometimes refer to the field as "symplectic topology" depending on the perspective.

The aim of the course is to give an introduction to the field adopting exactly a topological perspective. We will start with basic definitions, examples and constructions, and continue describing one of the main tools used to detect rigidity, namely pseudo-holomorphic curves à la Gromov. We will also give a quick overview of contact structures, and describe as main application of pseudo-holomorphic techniques a theorem of Eliashberg-Floer-McDuff, stating the uniqueness up to diffeomorphism of exact symplectic fillings of the standard contact odd dimensional spheres.

Introduction à la géométrie complexe analytique – Introduction to complex analytic geometry (Hoang-Chinh Lu)

Résumé : Le but de ce cours est d'introduire les outils fondamentaux dans la géométrie complexe analytique. Nous allons étudier les notions suivantes :

- (1) Fonctions holomorphes de plusieurs variables, fonctions plurisousharmoniques, variétés complexes.
- (2) Fibrés en droites et fibrés vectoriels holomorphes.
- (3) Formes différentielles, courants, cohomologie.
- (4) Métriques de Kähler canoniques et l'équation de Monge-Ampère complexe.

La référence principale est le livre de Demailly disponible sur sa page web :

<https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf>.

Abstract : The goal of this course is to introduce fundamental tools in complex analytic geometry. We will cover the following main topics :

- (1) Holomorphic functions in several variables, plurisubharmonic functions, complex manifolds.
- (2) Line bundles, holomorphic vector bundles.
- (3) Differential forms and currents, cohomology.
- (4) Canonical Kähler metrics and complex Monge-Ampère equations.

The main reference is the book of Demailly available on his webpage :

<https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf>.

Une introduction à la théorie ergodique – Introduction to ergodic theory. (Élise Goujard)

Résumé : Un système dynamique est une fonction définie sur un ensemble, dont on cherche à comprendre le comportement des orbites en temps long, ou plus généralement un flot dont on cherche à comprendre les trajectoires en temps long. En théorie ergodique on s'intéresse plus particulièrement à la dynamique des transformations mesurables préservant une mesure de probabilité sur un espace mesuré. Par exemple si on considère un billard dans lequel on lance une bille sans frottement, on peut se demander si elle revient à son point de départ en temps suffisamment long, si elle visite toutes les régions de la table de billard, etc.

Dans ce cours nous présenterons un panorama des propriétés, méthodes et outils de base de théorie ergodique (récurrence, ergodicité, mélange, méthodes spectrales, entropie, etc) en mettant l'accent sur des exemples géométriques. On s'intéressera en particulier à la dynamique des flots géodésique et horocyclique sur les surfaces hyperboliques après avoir discuté de leur géométrie. Selon le temps on étudiera également la dynamique du flot linéaire sur les surfaces de translation en lien avec les billards polygonaux et les échanges d'intervalles.

Abstract : A dynamical system is a map acting on a set, and the aim of the theory is to understand the long time behavior of the orbits. More generally one considers flows and one tries to understand the long time behavior of the trajectories. Ergodic theory studies the dynamics of measure preserving actions of measurable maps on a measure space. For instance, consider the system formed by a billiard ball moving with no friction on a billiard table. Does it come back to its initial point eventually? Does it visit all regions of the table?

In this course we present a panorama of the basic properties, methods and tools from ergodic theory (recurrence, ergodicity, mixing, spectral methods, entropy, etc) with a special emphasis on geometrical examples. One goal of the course is to study the dynamics of the geodesic and horocycle flow on hyperbolic surfaces; we will first discuss their construction and geometric properties. Depending on time we will also study some dynamical properties of the linear flow on translation surfaces in relation to polygonal billiards and interval exchange transformations.

Parcours Analyse et Probabilités

Premier semestre

Resonances, Normal forms and Hamiltonian nonlinear PDEs (Benoît Grébert)

Résumé : Les solutions de petites amplitudes d'équations aux dérivées partielles non-linéaires dispersives sur un compact sans bord (par exemple un tore ou une sphère) sont soumises à deux effets concurrents :

- la dispersion des ondes, conséquence du fait que les ondes planes solutions de la partie linéaire de l'équation voyagent avec des vitesses différentes (les ondes s'éloignent les unes des autres)
- la compacité du domaine qui incite à l'interaction via la non-linéarité (les ondes sont amenées à se revoir souvent !)

Qui gagne ? La dynamique en temps long va-t-elle vers la stabilité ou la turbulence ? Nous essaierons de répondre (partiellement) à ces questions sur quelques exemples et à travers des méthodes de formes normales dans le cadre des EDPs Hamiltoniennes.

Abstract : Solutions of small amplitudes of non-linear dispersive partial differential equations on a compact without boundary (e.g. a torus or a sphere) are subject to two concurrent effects :

- wave dispersion, a consequence of the fact that the plane waves solving the linear part of the equation travel with different velocities (the waves move away from each other).
- the compactness of the domain which encourages interaction via non-linearity (the waves have to see each other often !)

Which wins ? Does the dynamics in long time go towards stability or turbulence ? We will try to answer (partially) these questions on a few examples and through normal form methods in the context of Hamiltonian PDEs.

Introduction aux opérateurs non bornés et à la théorie spectrale — Introduction to unbounded operators and to spectral theory (Dorian Le Peutrec)

Résumé : La théorie des opérateurs non bornés sur les espaces de Hilbert de dimension infinie généralise celle des opérateurs linéaires continus, dits bornés. Elle permet notamment d'étudier les opérateurs différentiels linéaires, tels que le laplacien ou les opérateurs de Schrödinger, dont l'étude générale n'est pas couverte par la théorie des opérateurs bornés.

Dans ce cours, nous introduirons les opérateurs non bornés et leur théorie spectrale, notamment motivée par des questions de stabilité de phénomènes d'évolution modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDP). Ces notions seront en particulier illustrées par de nombreux exemples issus de la théorie des EDP.

Abstract : The theory of unbounded operators on infinite-dimensional Hilbert spaces generalizes that of continuous linear operators, also called bounded operator. It allows in particular the study of linear differential operators, such as the Laplacian or the Schrödinger operators, whose general study is not covered by the theory of bounded operators.

In this course, we will introduce unbounded operators and their spectral theory, in particular motivated by questions of stability of evolution phenomena modeled by partial differential equations (PDEs). These notions will be illustrated by many examples from the theory of PDEs.

Introduction aux EDP hyperboliques et aux méthodes numériques de volumes finis – Introduction to hyperbolic PDEs and numerical finite volume methods (Christophe Berthon) *Cours en commun avec le M2 MACS*

Résumé : Dans ce cours, on s'intéresse à l'approximation numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservation par des méthodes aux volumes finis. Dans un premier temps, on étudie le comportement d'une équation scalaire non-linéaire. En particulier, on montre que la solution peut devenir discontinue en un temps fini même pour une donnée initiale très régulière. On établit les relations de Rankine-Hugoniot pour définir les solutions discontinues et on introduit les inégalités d'entropie pour contrôler les solutions faibles. Fort de ces résultats, on donne la solution du problème de Riemann qui est essentielle pour le développement du schéma numérique de Godunov. Le problème de Riemann est ensuite étudié pour des systèmes hyperboliques conservatifs et il est appliqué aux équations de Saint-Venant et d'Euler. Afin d'approcher les solutions des systèmes hyperboliques considérés, plusieurs méthodes numériques d'approximation sont présentées et mises en application.

Abstract : In this course, we focus on the numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws by adopting finite volume methods. First, we study the behavior of a nonlinear scalar equation. In particular, we show that the solution can become discontinuous in a finite time even for a very smooth initial data. Rankine-Hugoniot relations are established to define discontinuous solutions, and entropy inequalities are introduced to control weak solutions. On the basis of these results, the solution of the Riemann problem is given, which is essential for the development of Godunov's numerical scheme. The Riemann problem is then studied for conservative hyperbolic systems and applied to the Saint-Venant and Euler equations. In order to approximate the solutions of the considered hyperbolic systems, several numerical approximation methods are presented and applied.

Deuxième semestre

Introduction à l'analyse des EDP décrivant l'évolution d'un fluide parfait – Introduction to the analysis of PDEs describing perfect fluid motion (Nicolas Depauw)

Résumé :

Transport et Conservation: EDP du 1er ordre associées à une EDO : Cauchy-Lipschitz et au-delà. Solutions renormalisées. Flots Lagrangiens réguliers.

Loi de conservation scalaire: Solution de viscosité. Formulation cinétique. Propriété minimisante. Exemple : Burgers.

Système hyperbolique quasilinéaire: Solutions classiques : caractère bien posé en temps petit, ou a données petites en cas de dispersion.

Équation d'Euler: Modélisations. Notions de solutions. Solutions classiques. Cas particulier de la dimension 2 d'espace.

Abstract :

Transport and Conservation: 1st order PDEs associated with an ODE : Cauchy-Lipschitz and beyond. Renormalized solutions. Regular Lagrangian flows.

Scalar conservation law: Viscosity solution. Kinetic formulation. Minimizing property. Example : Burgers.

Quasilinear hyperbolic system: Classical solutions : well-posedness in small time, or for small data in case of dispersion.

Euler equation: Models. Notions of solutions. Classical solutions. Special case of space dimension 2.

Analyse haute fréquence sur les groupes de Lie nilpotents – High frequency analysis on nilpotent Lie groups (Clotilde Fermanian Kammerer)

Résumé : Dans ce cours, on s'intéressera à l'analyse de phénomènes hautes fréquences sur des groupes de Lie nilpotents. Par 'phénomènes haute fréquence', on pense à des fonctions de carré intégrables dépendant d'un paramètre, dont les normes de Sobolev sont beaucoup plus grandes que la norme L^2 , en termes de ce paramètre. De telles familles apparaissent dans des problèmes spectraux ou lors de la résolution d'équations aux dérivées partielles. Elles présentent des défauts de convergence au sens où leurs oscillations les font converger faiblement vers 0 dans L^2 mais pas fortement (la convergence se faisant en fonction du paramètre dont elles dépendent). Dans l'espace euclidien, l'analyse de Fourier et la théorie des opérateurs pseudodifférentiels permet de décrire les obstructions à la convergence forte de ces familles de fonctions, par exemple par des mesures sur l'espace usuel et l'espace de Fourier, appelées mesures de défaut. On s'intéressera donc à l'analyse de Fourier sur des groupes de Lie nilpotents, laquelle est basée sur la théorie des représentations, à la construction de mesures de défaut adéquates via un calcul pseudodifférentiel (dit semi-classique car dépendant d'un paramètre). Les principaux exemples seront des groupes stratifiés de pas 2 comme le groupe de Heisenberg, ainsi que le groupe de Engel (de pas 3) ; on s'appuiera bien évidemment sur le cas de l'espace euclidien usuel.

Abstract : This course focuses on the analysis of high-frequency phenomena on nilpotent Lie groups. By 'high-frequency phenomena', we think to the data of integrable square functions depending on a parameter, whose Sobolev norms are much larger than the L^2 norm, in terms of this parameter. Such families appear in spectral problems or when solving partial differential equations. They have convergence defects in the sense that their oscillations make them converge weakly towards 0 in L^2 , but not strongly (convergence taking place in terms of the parameter on which they depend). In the Euclidean space, Fourier analysis and the theory of pseudodifferential operators can be used to describe obstructions to the strong convergence of these families of functions, for example by means of measures on the usual space or in Fourier space, known as defect measures. We will study Fourier analysis on nilpotent Lie groups, which is based on representation theory, and the construction of suitable defect measures via a pseudodifferential calculus (said semi-classic because it will depend on a parameter). The main examples will be stratified groups of step 2 such as the Heisenberg group, as well as the Engel group (of step 3), and we will always keep in mind the case of the Euclidean space.

Champs aléatoires et ensembles de niveaux – Random fields and level sets (Guillaume Poly)

Résumé : Le cours débutera par une introduction générale aux champs aléatoires et tout particulièrement les champs Gaussiens avec un accent mis sur l'étude de la régularité de leurs trajectoires et une présentation des inégalités fonctionnelles classiques. Puis, ce cours développera les outils (i.e. formules de Kac Rice) permettant d'étudier les ensembles de niveaux de ces champs et leurs propriétés asymptotiques dans différents contextes (processus Gaussiens stationnaires, polynômes aléatoires de Kac, polynômes trigonométriques aléatoires, harmoniques sphériques aléatoires etc...) Si le temps le permet, on pourra s'intéresser au caractère universel de ces propriétés asymptotiques à savoir étudier comment le choix de l'aléa sous-jacent au modèle influe sur le comportement limite des ensembles de niveaux mais aussi présenter quelques applications concrètes en physique mathématiques ou bien en statistiques.

Abstract : The course will begin with a general introduction to random fields, and in particular Gaussian fields, with a focus on the study of the regularity of their trajectories and a presentation of classical functional inequalities. The course will then develop the tools (i.e. Kac Rice formulas) for studying the level sets of these fields and their asymptotic properties in different contexts (stationary Gaussian processes, random Kac polynomials, random trigonometric polynomials, random spherical harmonics, etc.). Time permitting, the universal character of these asymptotic properties will be explored, i.e. how the choice of the underlying randomness influences the limit behavior of level sets, as well as concrete applications in mathematical physics and statistics.