Master 2 *Mathématiques Fondamentales*

(english version below)

Le responsable du Master 2 *Mathématiques Fondamentales* est

Erwan Brugallé erwan.brugalle@math.cnrs.fr

Chaque étudiant doit valider les trois cours communs, plus deux cours spécialisés chaque semestre. Les cours spécialisés sont à choisir parmi les onze cours proposés en M2 MF à l'Université de Nantes. Dans un soucis de visibilité, ces onze cours sont répartis en deux parcours : Algèbre et Géométrie, et Analyse et Probabilités (dont un cours en commun avec le M2 MACS de Nantes Université). Cette division est purement indicative, les étudiantes sont libres de choisir les cours spécialisés parmis les onze proposés. Il est également possible de choisir jusqu'à deux cours du Master 2 partenaire de l'Université de Rennes (avec des frais de transport éventuels pris en charge par le Centre Henri Lebesgue ou du département de Mathématique) et, sous réserve de validation préalable du responsable pédagogique, dans d'autres masters nantais.

Il est possible de suivre plus de cours que nécessaires.

La partie pratique consiste en un stage de 3 mois (à peu près du 1er avril au 30 juin) dans un laboratoire de recherche sous la direction d'un enseignant-chercheur. Le stage peut se dérouler dans un autre laboratoire que le Laboratoire de Mathématiques Jean Leray de Nantes. La recherche du stage commence généralement début janvier et est orientée par le responsable du M2. Ce stage se termine par la remise d'un rapport et une soutenance d'une demi-heure.

Une réunion de rentrée aura lieu à l'Université de Rennes le 3 septembre 2024. Elle sera l'occasion de présenter tous les cours du premier semestre et de choisir les cours suivis. Un départ de Nantes sera organisé vers 9h30.

Master 2 *Fundamental Mathematics*

The 2nd year of our Master in Fundamental Mathematics is chaired by

Erwan Brugallé erwan.brugalle@math.cnrs.fr

This M2 is organised along two thematics :
- Algebra and Geometry
- Analysis and Probability

Each student must complete three common courses, plus two specialized courses each semester. The specialized courses are chosen from the eleven courses offered in M2 MF at Nantes Université. For the sake of visibility, these ten courses are divided into two tracks : Algebra and Geometry, and Analysis and Probability (including one joint course with M2 MACS from Nantes Université). This division is purely indicative ; students are free to choose specialized courses from among the eleven proposed. It is also possible to choose up to two courses from the partner Master 2 program at Rennes University (with transport costs covered by the Centre Henri Lebesgue or the Mathematics Department) and, subject to prior approval by the course director, from other Master programs in Nantes.

It is possible to attend more lectures than necessary.

A large part of the second semester is devoted to a 3-month research internship (approximately from April 1st to June 30th) leading to the writing of a Master thesis. This internship may take place in another department than the Laboratoire de Mathématiques Jean Leray in Nantes.

An opening meeting will take place at Rennes University on September 3rd 2024, during which lectures from the first semester will be presented. Students will then choose which courses they will take. A departure from Nantes will be organized at 9h30.

Cours communs (premier semestre)

Differential topology (Hossein Abbaspour)

Résumé : Le but de ce cours est d'introduire, et d'illustrer par de nombreux exemples, les variétés différentielles et les objets associés : champs de vecteurs, formes différentielles, cohomologie de de Rahm.

Abstract : The purpose of this course is to introduce, through many examples, differentiable manifolds and differentiable objects that lives on these : vector fields, differential forms, de Rahm Cohomology.

Applications of Fourier Analysis to PDE (Gabriel Rivière)

Résumé : Plusieurs équations aux dérivées partielles classiques (equations de Laplace et Poisson, equation de la chaleur, equation des ondes, equation Schrodinger) seront étudiées en utilisant les outils fournis par l'analyse de Fourier. Une grande partie du cours sera consacrée à l'étude des espaces des distributions (ou des fonctions généralisées), aux operations sur ces espaces, et aux espaces des Sobolev. Puis, on s'intéressera à l'existence et l'unicité des solutions pour les equations mentionnées ci-dessus.

Abstract : Several classical partial differential equations (Laplace, Poisson, heat, wave and Schrodinger equations) will be studied from the perspective of Fourier analysis. For this, we will need to introduce the formalism of spaces of distributions (or generalized functions), the associated operations and transformations (among which, the Fourier transform), and Sobolev spaces. With this set of tools, we can address questions regarding the existence and the uniqueness of solutions for the equations mentioned above.

Séminaire des étudiants (Vincent Colin et Joe Viola)

Parcours Algèbre et Géométrie

Premier semestre

Topologie algébrique (Baptiste Chantraine)

Résumé : Le but du cours est d'introduire des invariants d'espaces topologiques permettant, entre autre, de les distinguer. Nous commencerons par étudier les complexes de chaînes pour introduire le complexe des chaînes singulières d'un espace. Nous utiliserons les propriétés de suites exactes et d'excision pour calculer l'homologie de quelques exemples. Nous calculerons l'homologie des complexes cellulaires à l'aide de l'homologie cellulaire. Dans la seconde partie du cours nous parlerons de cohomologie et de dualité de Poincaré, de changement de coefficient et du théorème des coefficient universel.

Abstract : The goal of the class is to introduce some invariants of topological spaces allowing to distinguish them. We will start by studying chain complex and introduce the singular chain complex of a topological space. We will use exact sequences and excision to comute the homology of some example. We will compute the homology of CW complexes using cellular homology. In the second part of the class we will talk about cohomology and Poicaré duality and change of coefficient and prove the universal coefficient theorem.

Analyse sur les groupes de Lie – Analysis on Lie Groups (Gilles Carron)

Résumé : Les groupes de Lie sont des variétés équipées d'une loi de groupe différentiable. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SO}(n), \mathrm{SU}(n)$ sont des exemples classiques de groupe de Lie. Ce cours sera l'occasion de traiter de différent sujets : mesure de Haar, théorie des représentations des groupes de Lie compacts, Laplacien sur la sphère et son spectre et aussi des exemples de calcul de cohomologie d'espace homogène.

Abstract : Lie group are manifold endowed with a differentiable structure of group. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SO}(n), \mathrm{SU}(n)$ are classical examples of Lie groups. This course will cover different topics : Haar measure, representation theory of compact Lie groups, Laplacian on the sphere and its spectrum and also some computation of cohomology of homogeneous space.

Reference. Jacques Faraut : Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet.

Deuxième semestre

Catégories tensorielles – Tensor categories (Friedrich Wagemann)

Résumé : Ce cours est une introduction aux catégories tensorielles. Il y aura une introduction aux catégories, foncteurs, foncteurs adjoints. Ensuite la notion de catégorie tensorielle, en mettant l'accent sur le fait que pour une catégorie C de A-modules, les propriétés sur C se reflètent en propriétés sur A. Les catégories tensorielles visées seront les catégories de représentations du double quantique d'un groupe fini, de $U_q(sl_2)$ et d'un module croisé de groupes. On terminera avec les catégories modulaires.

Abstract : This series of lectures is an introduction to tensor categories. It starts with an introduction to categories, functors and adjoint functors. Then we will treat the notion of a tensor category, emphasizing the fact that structures on the category C of A-modules reflect structures on the algebra A. The tensor categories which we will treat in greater detail will be the categories of representations of the quantum double of a finite group, of $U_q(sl_2)$ and of a crossed module of groups. The last subject will be modular tensor categories.

Reference. Bakalov-Kirillov "Lectures on Tensor categories and modular functors", Kassel "Quantum groups".

Introduction à la géométrie complexe analytique – Introduction to complex analytic geometry (Hoang-Chinh Lu)

Résumé : Le but de ce cours est d'introduire les outils fondamentaux dans la géométrie complexe analytique. Nous allons étudier les notions suivantes :

(1) Fonctions holomorphes de plusieurs variables, fonctions plurisousharmoniques, variétés complexes.
(2) Fibrés en droites et fibrés vectoriels holomorphes.
(3) Formes différentielles, courants, cohomologie.
(4) Métriques de Kähler canoniques et l'équation de Monge-Ampère complexe.

La référence principale est le livre de Demailly disponible sur sa page web :
https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/manuscripts/agbook.pdf.

Abstract : The goal of this course is to introduce fundamental tools in complex analytic geometry. We will cover the following main topics :

(1) Holomorphic functions in several variables, plurisubharmonic functions, complex manifolds.
(2) Line bundles, holomorphic vector bundles.
(3) Differential forms and currents, cohomology.
(4) Canonical Kähler metrics and complex Monge-Ampère equations.

The main reference is the book of Demailly available on his webpage :
https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/manuscripts/agbook.pdf.

Géométrie algébrique — Algebraic geometry (Cristoph Sorger)

Résumé : ce cours est une introduction à la géométrie algébrique avec en vue l'étude des variétés algébriques “holomorphiquement” symplectiques. On commencera par une introduction aux variétés algébriques, affines et projectives, avec un point de vue de calcul explicite, puis on étudiera propriétés locales, diviseurs, intersection, et passage au quotient, avant de s'intéresser plus spécifiquement à la géométrie des variétés algébriques complexes munies d'une forme symplectique régulière.

Abstract : This course is an introduction to algebraic geometry with a view toward the study of symplectic “holomorphic” algebraic varieties. We begin with an introduction to affine and projective algebraic varieties, and then study local properties, divisors, intersection, and quotients, before turning more specifically to the geometry of complex algebraic varieties endowed with a regular symplectic form.

Parcours Analyse et Probabilités

Premier semestre

Une introduction aux problèmes inverses spectraux (François Nicoleau)

Résumé : Les problèmes inverses sont extrêmement importants dans la pratique (scanners, radars, tomographie en imagerie médicale, astrophysique, etc...). Très souvent, ils consistent à déterminer les caractéristiques physiques d'un objet inaccessible à l'observation, à l'aide de mesures indirectes. L'expérience la plus connue est celle de Rutherford qui proposa une structure planétaire de l'atome en examinant les diffractions d'un faisceau de particules. De la même façon, les trous noirs, qui sont par essence invisibles, peuvent être étudiés en observant les déviations de la lumière des étoiles proches. On peut ainsi calculer leur masse, leur charge et la constante cosmologique de l'univers.

L'objectif principal de ce cours est d'étudier quelques problèmes inverses spectraux relativement simples. On considèrera en particulier des opérateurs de Sturm-Liouville sur l'intervalle $[0,1]$, (resp. sur $[0,+\infty[$),

$$Hu = -u'' + qu,$$

avec des conditions au bord convenables. Par exemple, si le potentiel $q \in L^2(0,1)$ et est à valeurs réelles, le spectre de Dirichlet de l'opérateur H est constitué d'une suite de valeurs propres (λ_n) qui tend vers $+\infty$ et dont l'asymptotique est bien connue. Une fois ces propriétés établies, on s'intéressera au problème dit de Borg-Levinson qui consiste à déterminer (si cela est possible) ou de caractériser les potentiels à partir du spectre de H (voire de plusieurs spectres de l'opérateur H avec différentes conditions au bord).

Pour le problème de Sturm-Liouville sur l'intervalle $[0,+\infty[$, nous définirons une fonction importante, dite fonction de Weyl-Titchmarsh, et qui est intimement liée aux données spectrales. A l'aide de techniques d'analyse complexe, nous verrons alors que le comportement asymptotique de cette fonction permet de déterminer localement le potentiel q associé.

Références bibliographiques :

— Bennewitz C., *A proof of the local Borg-Marchenko Theorem*, Comm. Math. Phys. **211**, (2001), 131-132.
— Freiling G., Yurko V., *Inverse Sturm-Liouville Problems and their Applications*, NOVA Science Publishers, New York, (2001), 305 pp.
— Gesztesy F., Simon B., *A new approach of inverse spectral theory, II. General potentials and the connection to the spectral measure*, Annals of mathematics **152**, (2000), 593-643.
— Pöschel J., Trubowitz E., *Inverse Spectral Theory*, Academic Press, Boston, 1987.
— Simon B., *A new approach to inverse spectral theory, I. Fundamental formalism*, Annals of Mathematics **150**, (1999), 1029-1057.

Analyse harmonique I (Cristina Benea)

Résumé : L'introduction des séries de Fourier au XIXème siècle a permis d'avancer le domaine des équations aux dérivées partielles. Cela a également montré que, selon la question étudiée, certaines décompositions d'une fonction sont plus adaptées que d'autres.

Dans ce cours, nous nous familiariserons avec quelques outils classiques en analyse harmonique, encore largement utilisés dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Dans la plupart des cas, le principe sous-jacent sera de trouver la manière « appropriée » de découper une fonction en morceaux, de déterminer comment contrôler chaque élément et de remettre ensemble les pièces. En particulier, nous étudierons la convergence des séries de Fourier dans les espaces L^p, nous étudierons les opérateurs de Calderon-Zygmund et les opérateurs maximaux et nous examinerons le rôle de l'espace BMO (bounded medium oscillation) dans ce contexte.

Abstract : The introduction of Fourier series in the XIXth century allowed to advance the domain of partial differential equation. It also showed that, depending on the question studied, certain decompositions of a function are more suitable than others. In this course, we will get familiar with some classical tools in harmonic analysis, which are still widely used in the study of partial differential equations. In most cases, the underlying principle will be to find the "appropriate" way of cutting a function into pieces, figuring out how to control each element, and putting back together all the pieces. In particular, we will study the convergence of Fourier series in L^p spaces, study Calderon-Zygmund and maximal operators and look at the role of the BMO (bounded mean oscillation) space in this context.

Introduction aux EDP hyperboliques et aux méthodes numériques de volumes finis – Introduction to hyperbolic PDEs and numerical finite volume methods (Christophe Berthon) *Cours en commun avec le M2 MACS*

Résumé : Dans ce cours, on s'intéresse à l'approximation numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservation par des méthodes aux volumes finis. Dans un premier temps, on étudie le comportement d'une équation scalaire non-linéaire. En particulier, on montre que la solution peut devenir discontinue en un temps fini même pour une donnée initiale très régulière. On établit les relations de Rankine-Hugoniot pour définir les solutions discontinues et on introduit les inégalités d'entropie pour contrôler les solutions faibles. Fort de ces résultats, on donne la solution du problème de Riemann qui est essentielle pour le développement du schéma numérique de Godunov. Le problème de Riemann est ensuite étudié pour des systèmes hyperboliques conservatifs et il est appliqué aux équations de Saint-Venant et d'Euler. Afin d'approcher les solutions des systèmes hyperboliques considérés, plusieurs méthodes numériques d'approximation sont présentées et mises en application.

Abstract : In this course, we focus on the numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws by adopting finite volume methods. First, we study the behavior of a nonlinear scalar equation. In particular, we show that the solution can become discontinuous in a finite time even for a very smooth initial data. Rankine-Hugoniot relations are established to define discontinuous solutions, and entropy inequalities are introduced to control weak solutions. On the basis of these results, the solution of the Riemann problem is given, which is essential for the development of Godunov's numerical scheme. The Riemann problem is then studied for conservative hyperbolic systems and applied to the Saint-Venant and Euler equations. In order to approximate the solutions of the considered hyperbolic systems, several numerical approximation methods are presented and applied.

Deuxième semestre

Analyse harmonique II (Frédéric Bernicot)
Résumé : Dans ce cours, nous utiliserons les outils introduits au premier semestre (fonction maximale de Hardy-Littlewood, décomposition de Calderon-Zygmund, interpolation, ...) pour étudier la bornitude sur les espaces de Lebesgue d'opérateurs linéaires et bilinéaires, en vue d'obtenir des estimations fines utilisées pour l'analyse des EDPs par exemple. En particulier, nous nous efforcerons d'illustrer l'analyse temps-fréquence, où il est nécessaire de découper en espace et/ou en fréquence afin de savoir tirer le maximum d'informations au niveau local et d'apprendre à les sommer pour en déduire la bornitude globale de l'opérateur en utilisant de l'orthogonalité (même dans L^p, pour $p \neq 2$). Nous étudierons donc des estimations pour la fonctionnelle de Rubio de Francia, des estimations pour les paraproduits, pour les opérateurs bilinéaires de Coifman-Meyer, ainsi que les estimations de Stein-Tomas et Strichartz pour la dispersion.

Abstract : During this class, we will use tools which will have been introduced in the first semester (Hardy-Littlewood maximal function, Calderon-Zygmund decomposition, interpolation, ...) in order to study the boundedness in Lebesgue spaces for some linear and bilinear operators, having in mind to get sharp/precise estimates used for the analysis of PDEs for example. In particular, we will focus on illustrating the time-frequency analysis, which consists into performing suitable decomposition in space and/or in frequency, to get the finest information at the local level and then to learn how to sum this information to get the global boundedness of the operator by using some orthogonality (even in L^p, with $p \neq 2$). We will study estimates for the Rubio de Francia square function, estimates for paraproducts and bilinear Coifman-Meyer multipliers ; Stein-Tomas and Strichartz estimates for the dispersion.

Analyse haute fréquence sur les groupes de Lie nilpotents – High frequency analysis on nilpotent Lie groups (Clotilde Fermanian Kammerer)
Résumé : Dans ce cours, on s'intéressera à l'analyse de phénomènes hautes fréquences sur des groupes de Lie nilpotents. Par 'phénomènes haute fréquence', on pense à des fonctions de carré intégrables dépendant d'un paramètre, dont les normes de Sobolev sont beaucoup plus grandes que la norme L^2, en termes de ce paramètres. De telles familles apparaissent dans des problèmes spectraux ou lors de la résolution d'équations aux dérivées partielles. Elles présentent des défauts de convergence au sens où leurs oscillations les font converger faiblement vers 0 dans L^2 mais pas fortement (la convergence se faisant en fonction du paramètre dont elles dépendent). Dans l'espace euclidien, l'analyse de Fourier et la théorie des opérateurs pesudodifférentiels permet de décrire les obstructions à la convergence forte de ces familles de fonctions, par exemple par des mesures sur l'espace usuel et l'espace de Fourier, appelées mesures de défaut. On s'intéressera donc à l'analyse de Fourier sur des groupes de Lie nilpotents, laquelle est basée sur la théorie des représentations, à la construction de mesures de défaut adéquates via un calcul pseudodifférentiel (dit semi-classique car dépendant d'un paramètre). Les principaux exemples seront des groupes stratifiés de pas 2 comme le groupe de Heisenberg, ainsi que le groupe de Engel (de pas 3) ; on s'appuiera bien évidemment sur le cas de l'espace euclidien usuel.

*Abstract :*This course focuses on the analysis of high-frequency phenomena on nilpotent Lie groups. By 'high-frequency phenomena', we think to the data of integrable square functions depending on a parameter, whose Sobolev norms are much larger than the L^2 norm, in terms of this parameter. Such families appear in spectral problems or when solving partial differential equations. They have convergence defects in the sense that their oscillations make them converge weakly towards 0 in L^2, but not strongly (convergence taking place in terms of the parameter on which they depend). In the Euclidean space, Fourier analysis and the theory of pseudodifferential operators can be used to describe obstructions to the strong convergence of these families of functions, for example by means of measures on the usual space or in Fourier space, known as defect measures. We will study Fourier analysis on nilpotent Lie groups, which is based on representation theory, and the construction of suitable defect measures via a pseudodifferential calculus (said semi-classic because it will depends on a parameter). The main examples will be stratified groups of step 2 such as the Heisenberg group, as well as the Engel group (of step 3), and we will always keep in mind the case of the Euclidean space.

Introduction aux opérateurs non bornés et à la théorie spectrale — Introduction to unbounded operators and to spectral theory (Dorian Le Peutrec)

Résumé : La théorie des opérateurs non bornés sur les espaces de Hilbert de dimension infinie généralise celle des opérateurs linéaires continus, dits bornés. Elle permet notamment d'étudier les opérateurs différentiels linéaires, tels que le laplacien ou les opérateurs de Schrödinger, dont l'étude générale n'est pas couverte par la théorie des opérateurs bornés.

Dans ce cours, nous introduirons les opérateurs non bornés et leur théorie spectrale, notamment motivée par des questions de stabilité de phénomènes d'évolution modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDP). Ces notions seront en particulier illustrées par de nombreux exemples issus de la théorie des EDP.

Abstract : The theory of unbounded operators on infinite-dimensional Hilbert spaces generalizes that of continuous linear operators, also called bounded operator. It allows in particular the study of linear differential operators, such as the Laplacian or the Schrödinger operators, whose general study is not covered by the theory of bounded operators.

In this course, we will introduce unbounded operators and their spectral theory, in particular motivated by questions of stability of evolution phenomena modeled by partial differential equations (PDEs). These notions will be illustrated by many examples from the theory of PDEs.