Master 2 *Mathématiques Fondamentales et Applications*

(english version below)

Le responsable du Master 2 *Mathématiques Fondamentales et Applications* est

Erwan Brugallé erwan.brugalle@math.cnrs.fr

Le M2 s'organise autour des deux parcours :
- Algèbre et Géométrie
- Analyse et Probabilités

Chaque étudiant doit valider les trois cours communs et quatre cours spécialisés. Les cours spécialisés sont à choisir parmi les cinq cours proposés à l'Université de Nantes dans chaque parcours. Il est également possible de choisir jusqu'à deux cours du Master 2 partenaire de l'Université de Rennes (avec des frais de transport éventuels pris en charge par le Centre Henri Lebesgue) et, sous réserve de validation préalable du responsable pédagogique, dans d'autres masters nantais.

Il est possible de suivre plus de cours que nécessaires.

La partie pratique consiste en un stage de 3 mois (à peu près du 15 mars au 15 juin) dans un laboratoire de recherche sous la direction d'un enseignant-chercheur. Le stage peut se dérouler dans un autre laboratoire que le Laboratoire de Mathématiques Jean Leray de Nantes. La recherche du stage commence généralement début janvier et est orientée par le responsable du M2. Ce stage se termine par la remise d'un rapport et une soutenance d'une demi-heure.

Une réunion de rentrée aura lieu à l'Université de Rennes le premier septembre 2022. Elle sera l'occasion de présenter tous les cours du premier semestre et de choisir les cours suivis. Si la situation sanitaire le permet, un départ de Nantes sera organisé vers 9h00.

Master 2 de Mathématiques **Année 2022-2023**
Université de Nantes

Master 2 *Fundamental Mathematics and Applications*

The 2nd year of our Master in Fundamental Mathematics is chaired by

Erwan Brugallé erwan.brugalle@math.cnrs.fr

This M2 is organised along two thematics :
- Algebra and Geometry
- Analysis and Probability

Students need to take the three common courses, as well as four specialised courses. The latter are to be chosen among the five courses proposed at Nantes University within each theme. Student may also choose to take up to two courses taught at the Master 2 of Rennes 1 University (the Centre Henri Lebesgue will cover the travel fees from Nantes to Rennes). It is possible to attend more lectures than necessary.

A large part of the second semester is devoted to a 3-month research internship (approximately from March 15th to June 15th) leading to the writing of a Master thesis. This internship may take place in another department than the Laboratoire de Mathématiques Jean Leray in Nantes.

An opening meeting will take place at Rennes University on September 1st 2022, during which lectures from the first semester will be presented. Students will then choose which courses they will take. If the pandemic situation allows, a departure from Nantes will be organized at 9h00.

Cours communs (premier semestre)

Introduction to differential geometry (Erwan Brugallé)

Résumé : Le but de ce cours est d'introduire, et d'illustrer par de nombreux exemples, les variétés différentielles et les objets associés : champs de vecteurs, formes différentielles, cohomologie de de Rahm.

Abstract : The purpose of this course is to introduce, through many examples, differentiable manifolds and differentiable objects that lives on these : vector fields, differential forms, de Rahm Cohomology.

Applications of Fourier Analysis to PDE (Cristina Benea)

Résumé : Plusieurs équations aux dérivées partielles classiques (equations de Laplace et Poisson, equation de la chaleur, equation des ondes, equation Schrodinger) seront étudiées en utilisant les outils fournis par l'analyse de Fourier. Une grande partie du cours sera consacrée à l'étude des espaces des distributions (ou des fonctions généralisées), aux operations sur ces espaces, et aux espaces des Sobolev. Puis, on s'intéressera à l'existence et l'unicité des solutions pour les equations mentionnées ci-dessus.

Abstract : Several classical partial differential equations (Laplace, Poisson, heat, wave and Schrodinger equations) will be studied from the perspective of Fourier analysis. For this, we will need to introduce the formalism of spaces of distributions (or generalized functions), the associated operations and transformations (among which, the Fourier transform), and Sobolev spaces. With this set of tools, we can address questions regarding the existence and the uniqueness of solutions for the equations mentioned above.

Séminaire des étudiants (Gabriel Rivière et Hossein Abbaspour)

Parcours Algèbre et Géométrie

Premier semestre

Topologie algébrique (Baptiste Chantraine)

Résumé : Le but du cours sera d'introduire les premiers outils de la topologie algébriques. Nous commencerons par étudier les revêtements des espaces topologiques et leurs transformations. Cela permettra de définir le groupe fondamental. Nous verrons certains outils permettant de calculer celui-ci, notamment le théorème de van Kampen. Ensuite nous introduirons l'homologie singulière des espaces et étudierons leurs aspects fonctorielsl. Cela nous permettra d'aborder certains aspects de base de l'algèbre homologique de base. Nous terminerons par définir l'homologie cellulaire et certaines méthode pour la calculer. Le cours sera illustré par beaucoup d'exemples explicites.

Abstract : The goal of the class is to introduce the first tools of algrebraic topology. We will first study coverings of topological spaces and their transformations. That will allows us to define the fundamental group. We will devellop tools to compute it for instance van Kampen theorem. We will then introduce singular homology of spaces and study its functorial aspects. That will allow us to study some basic aspects of homological algebra. In the end we will define cellular homology and see how to compute it. All classes will be illustrated with lots of explicit examples.

Algèbre homologique et théorie des faisceaux – Homological algebra and sheaf theory (Stéphane Guillermou)

Résumé : L'algèbre homologique s'est développée à partir de la topologie algébrique lorsqu'on a commencé à associer un espace topologique des “invariants”, ses “groupes d'homologie”. Deux espaces homéomorphes ont les mêmes groupes d'homologie ; on obtient donc une façon de voir que des espaces ne sont pas homéomorphes. Le procédé qui à un espace topologique associe son homologie a été formalisé et est utilisé dans d'autres domaines que la topologie. On introduira les techniques de bases de l'algèbre homologique puis un formalisme plus approfondi, la notion de catégorie dérivée. En parallèle ces techniques seront appliquées aux faisceaux sur les espaces topologiques. Un faisceau est la donnée d'un espace vectoriel pour chaque ouvert de l'espace, avec des propriétés calquées sur l'exemple qui à un ouvert associe l'espace des fonctions sur cet ouvert. La cohomologie des faisceaux donne une autre approche des groupes de cohomologie d'un espace. Ce cours aura des liens avec le cours de topologie algébrique.

Abstract : Homological algebra developed from algebraic topology when one began to associate a topological space with “invariants”, its “homology groups”. Two homeomorphic spaces have the same homology groups ; we thus obtain a way to see that spaces are not homeomorphic. The procedure that to a topological space associates its homology has been formalized and is used in other fields than topology. We introduce the basic techniques of homological algebra and then a more profound formalism, the notion of derived category. In parallel these techniques will be applied to sheaves on topological spaces. A sheaf is the data of a vector space for each open subset of the space, with properties modeled on the example which associates to an open subset the space of functions on this open. The cohomology of sheaves gives another another approach to cohomology groups of a space. This course will have links with the course on algebraic topology.

Références.
— Weibel : An introduction to homological algebra
— The first two chapters of Kashiwara and Schapira : Sheaves on manifolds

Deuxième semestre

Introduction aux théories de l'homotopie – Introduction to homotopy theories (Sinan Yalin)

Résumé : Le but de ce cours est d'expliquer l'approche moderne des théories de l'homotopie, qui fournit un cadre essentiel aux développements récents de la topologie algébrique ainsi qu'à ses interactions avec certains aspects de la géométrie. Nous verrons comment la compréhension de la notion d'homotopie dans divers contextes (espaces topologiques, ensembles simpliciaux, complexes de chaines...) découle de la théorie des catégorie de modèles, développée par Daniel Quillen dans les années 60-70. Nous présenterons certains des résultats clés et puissants outils de cette théorie. Selon le temps restant, nous illustrerons, en guise de perspectives, leurs applications des sujets de recherches très actifs (théorie de l'homotopie rationnelle, théorie des catégories supérieures, géométrie algébrique dérivée, pour nommer quelques possibilités).

Abstract : The goal of this course is to explain the modern approach of homotopy theories, which provides an essential framework for the recent developments of algebraic topology as well its interactions with certain aspects of geometry. We will see how understanding the notion of homotopy in various contexts (topological spaces, simplicial sets, chain complexes...) follows from model category theory, developped by Daniel Quillen in the 60-70's. We will present some of the key results and powerful tools of this theory. Depending on the remaining time, we will illustrate, as perspectives, how they fit in some very active research topics (rational homotopy, higher category theory, derived algebraic geometry, to name a few possibilities).

Riemann surfaces (Gilles Carron)

Résumé : L'étude des surfaces de Riemann est un sujet à la croisée de la géométrie, de l'algèbre, de la théorie des groupes, de la topologie, de l'analyse complexe et de l'analyse sur les variétés. L'objectif de ce cours est donc d'introduire plusieurs outils géométriques, algébriques, analytiques pour appréhender plusieurs aspects des surfaces de Riemann. Les surfaces de Riemann peuvent être définies comme des variétés complexes de dimension 1, ce sont donc des espaces topologiques qui sont localement homéomorphes à un ouvert de $\mathbb{C}$ et on dispose donc de notions de fonctions holomorphes, méromorphes. Historiquement, la définition de surfaces de Riemann a émergée pour donner un sens géométrique et topologique aux fonctions holomorphes multivaluées comme $\sqrt{z}, \log z$. Un seconde définition équivalente est celle d'une variété réelle de dimension 2 (d'où le nom de surface) équipée chaque espace tangent d'une rotation d'angle $+\pi/2$ ou d'une façon de mesurer les angles orientées. On étudiera par exemple les fonctions méromorphes et les liens de l'étude des fonctions méromorphes avec la classification des fibrés en droites complexes sur la surface, avec la topologie de la surface et cette étude mènera au théorème de Riemann-Roch, il s'agit d'une formule pour la dimension de l'espace des fonctions méromorphes dont on prescrit les pôles. Ce théorème permet une classification de certaines surfaces (de genre 0 et 1). Le théorème d'uniformisation des surfaces de

Riemann est un résultat majeur démontré au début du XX^{ieme} siècle par Koebe et Poincaré. Ce théorème permet de géométriser les surfaces de Riemann et de classifier les surfaces de Riemann compactes. On essayera d'en appréhender certaines facettes avec en fonction du développement du cours des approches via l'analyse complexe, la théorie du potentiel (étude des fonctions harmoniques) ou d'analyse globale en étudiant la courbure de Gauss.

Abstract : The study of Riemann surfaces is a subject at the crossroads of geometry, algebra, group theory, topology, complex analysis and analysis on manifolds. The objective of this course is therefore to introduce several geometric, algebraic and analytical tools to understand several aspects of Riemann surfaces. Riemann surfaces can be defined as complex varieties of dimension 1, so they are topological spaces which are locally homeomorphic to an open of $\mathbb{C}$ and we have on them notions of holomorphic and meromorphic functions. Historically, the definition of Riemann surfaces emerged to give a geometrical and topological meaning to multivalued holomorphic functions like $\sqrt{z}, \log z$. A second equivalent definition is that of a real manifold of dimension 2 (hence the name of surface) where each tangent space is endowed with a rotation of angle $+\pi/2$ or a way to measure oriented angles. We will study for example the meromorphic functions and the links of the study of the meromorphic functions with the classification of complex lines bundle, with the topology of the surface and this study will lead to the Riemann-Roch theorem, it is a formula for the dimension of the space of the meromorphic functions whose poles are prescribed. This theorem allows a classification of certain surfaces (of genus 0and 1). The uniformisation theorem for Riemann surfaces is a major result that have proven at the beginning of the XX's century by Koebe and Poincaré. This theorem allows to geometrize Riemann surfaces and to classify compact Riemann surfaces. We will try to apprehend some facets of this fascinating theorem with, according to the development of the course, approaches via complex analysis, or potential theory (study of harmonic functions) or global analysis by studying the Gauss curvature.

Bibliographic references :

— Ahlfors, L., Complex Analysis, McGraw Hill, 1966.
— Donaldson S : Riemann surfaces, Oxford graduate text in Mathematics, vol. 22. 2011.
— Farkas, H., and Kra, I., Riemann surfaces, Springer, 1980.
— Forster, O. : Lectures on Riemann surfaces, Graduate Texts in Mathematics, vol.81, Springer-Verlag, Berlin,1981.
— Griffiths, P., and Harris, J., Algebraic geometry, Wiley-Interscience, 1978.
— Jost J., Compact Riemann Surfaces, An Introduction to Contemporary Mathematics, Universitext, Springer, 2002.
— de Saint-Gervais H.-P., Uniformisation des surfaces de Riemann, Retour sur un théorème centenaire, ENS Édition, 2011. (An english translation is also available).
— Simon, B. : A comprehensive course in analysis (part 2A : basic complex analysis and part 2B : advanced complex analysis), AMS, American Mathematical Society, 2015.

Introduction à la géométrie riemannienne (Vestislav Apostolov)

Résumé : Ce cours est proposé comme une introduction à la géométrie riemannienne. Nous couvrirons les sujets classiques suivants : variétés riemanniennes, connexions, géodésiques. Exemples de variétés riemanniennes. Lemme de Gauss, application exponentielle, théorème de Hopf-Rinow. Transport parallèle, holonomie. Variation première et seconde

de la longueur, champs de Jacobi. Courbure sectionnelle, courbure de Ricci, courbure scalaire. Théorèmes de Bonnet-Myers, de Synge, et de Cartan-Hadamard. Uniformisation des variétés riemanniennes à courbure sectionnelle constante. Des sujets supplémentaires, tels le Théorème de Hodge-De Rham, les champs de Killing et le théorème de Bochner, les métriques kahlériennes sur une variété complexe, les variétés de Calabi-Yau, etc. peuvent être ajoutés si le temps nous le permet.

Abstract : This is an introductory course to Riemannian Geometry. We are going to cover the following classic material. Riemannian manifolds, the Levi-Civita connection, geodesics. Examples of Riemannian manifolds. The exponential map, Hopf-Rinow theorem and Gauss Lemma. Parallel transport, Riemannian holonomy. The Riemannian curvature tensor, sectional curvature, Ricci curvature, scalar curvature. Jacobi fields, the Bonnet-Myers, Synge and Cartan-Hardamard theorems. Uniformization of space forms. Killing vector fields and Bochner's Theorem. Hodge-DeRham theory.

Parcours Analyse et Probabilités

Premier semestre

Systèmes Hamiltoniens et formes normales (Benoît Grébert)

Résumé : Nous nous intéresserons aux systèmes Hamiltoniens en dimension finie. Il s'agit donc d'EDOs, linéaires ou pas, autonomes ou pas, avec une structure algébrique particulière. Sous des hypothèses de non résonances, cette structure permet de mettre en place des techniques de changement de variables (formes normales) efficaces pour ramener, de manière exacte ou approchée, les dynamiques de l'EDO de départ à celles d'une EDO linéaire à coefficients constants.
Après une brève présentation générale, incluant les notions de structure symplectique, de résonances, d'intégrales premières, de transformations canoniques, nous concentrerons nos efforts sur deux résultats :

— **Forme normale de Birkhoff.** Ici on considère une EDO Hamiltonienne nonlinéaire et autonome. On montrera que, si la partie linéaire est non résonante, les solutions petites de l'EDO nonlinéaire restent proches, pendant des temps très longs, à des solutions de la partie liénaire.

— **Réductibilité.** Ici on considère une EDO Hamiltonienne linéaire mais non autonome (i.e. l'Hamiltonien dépend du temps) et on se placera dans un contexte perturbatif : l'Hamiltonien se décompose en une partie autonome plus une partie petite dépendant du temps de manière quasi-périodique. Nous montrerons que, sous des hypothèses de non résonances sur la partie autonome, on ramène l'EDO non autonome à une EDO autonome via un changement de variables (c'est ce que l'on appelle la réductibilité). Ce résultat généralise un théorème de Gaston Floquet (qui considérait des perturbations périodiques en temps) et sa preuve s'appuie sur des techniques de formes normales de type KAM.

Au second semestre, le cours de J. Bernier envisagera des problèmes similaires mais pour des systèmes en dimension infinie (en particulier des EDPs).

Abstract : We are interested in finite dimensional Hamiltonian systems, that is to say ODEs, linear or not, autonomous or not, with a particular algebraic structure. This structure allows us to set up efficient techniques of change of variables (normal forms) in order to reduce, in an exact or approximate way, the dynamics of the original ODE to those of a linear ODE with constant coefficients.
After a brief general presentation, including the notions of symplectic structure, resonances, first integrals, canonical transformations, we will focus on two results :

— **Birkhoff normal form.** Here we consider a nonlinear autonomous Hamiltonian ODE. It will be shown that, if the linear part is nonresonant, the small solutions of the nonlinear ODE remain close, for very long times, to the solutions of the linear part.

— **Reductibility.** Here we consider a linear but non-autonomous Hamiltonian ODE (i.e. the Hamiltonian depends on time) and we will place ourselves in a perturbative context : the Hamiltonian decomposes into an autonomous part plus a small part depending on time in a quasi-periodic way. We will show that, under assumptions of non resonances on the autonomous part, we reduce the non autonomous ODE to an autonomous ODE via a change of variables (this is called reducibility).

This result generalizes a theorem of Gaston Floquet (who considered time periodic perturbations) and its proof is based on normal form techniques of KAM type.

In the second semester, J. Bernier will consider in his course similar problems but for infinite dimensional systems (in particular PDEs).

Introduction à l'intégrale stochastique/Introduction to stochastic integration (Mikael Escobar-Bach)

Abstract : A stochastic process is a phenomenon which evolves through time with a random trajectory, and as such, is represented as a family of random variables indexed by time. In this course, we propose to study the various implications brought by such random object, and hence introduce the concepts of the stochastic process and the stochastic integration. We will first construct and review some basic facts about the Brownian motion, including its Markov property, as it represents a major stochastic process example. Next, we will introduce the concept of the continuous semi-martingale in order to finally construct the stochastic integral with respect to a continuous semi-martingale.

Deuxième semestre

Pseudospectrum, semigroups, and quasimodes for non-selfadjoint operators (Joseph Viola)

Résumé : Grâce au théorème spectral, l'étude d'un opérateur autoadjoint (ou normal) sur un espace de Hilbert se réduit à l'analyse des valeurs et vecteurs propres (ou des objets analogues dans le cas continu). Les opérateurs non-autoadjoints, importants dans plusieurs domaines tels que la théorie des résonances, la théorie cinétique et la théorie des perturbations, ne se ramènent pas si facilement à leurs propriétés spectrales. Nous étudierons des méthodes pour mesurer et comprendre l'écart entre l'idéal autoadjoint et la réalité pour les opérateurs non-autoadjoints.

Abstract : Thanks to the spectral theorem, a self-adjoint (or normal) operator on Hilbert space can be nearly completely understood by studying its eigenvalues and eigenvectors (or their continuous analogues). Non-selfadjoint operators, which appear in many applications including the theory of resonances, kinetic theory, and perturbation theory, are not so easily reduced to their spectral decomposition. We will study ways to measure and understand the distance between the selfadjoint ideal and the true behavior of non-selfadjoint operators.

Formes normales de Birkhoff pour les EDPs Hamiltonniennes – Birkhoff normal forms for Hamiltonian PDEs (Joackim Bernier)

Résumé : Nous verrons comment les méthodes de formes normales de Birkhoff, introduites au premier semestre dans le cours de Benoît Grébert, peuvent être étendues à la dimension infinie afin d'étudier le comportement en temps longs des solutions d'équations dispersives non-linéaires posées sur des domaines bornés (comme l'équation de Schrödinger non-linéaire sur le cercle). Nous nous intéressons particulièrement à la question de la stabilité de la solution nulle dans les espaces de Sobolev ou, autrement dit, à l'apparition de phénomènes de turbulence.

*Abstract :*We will see how Birkhoff normal form methods, introduced by Benoît Grébert during the first semester, can be extended to the infinite dimensional setting in order to study the long time behavior of solutions to nonlinear dispersive PDEs on bounded domains (such as the nonlinear Schrödinger equations on the circle). In particular, we

will focus on the question of the stability of the small solutions in Sobolev spaces or, in other words, on the existence of turbulence phenomena.

Systèmes de particules en interaction de champ moyen – Mean Field interacting particles systems (Paul-Éric Chaudru de Raynal)

Abstract : The main objective of this course consists in introducing stochastic mean field interacting particles systems as well as their asymptotic counterpart known as McKean-Vlasov stochastic systems. These systems describe, respectively, the random evolution of a large number of particles/agents which interact with each other through the empirical measure of the system; and the dynamic of one of these particles in the asymptotic (with respect to the number of agents) regime. This relies on the theory of Stochastic Differential Equations which will play a central role along the lectures. If time allows, connections with (non-linear) PDEs will be discussed.